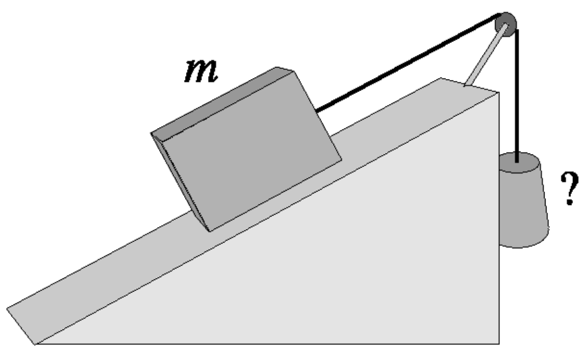
Stevins lutande plan

Sören Holst[1]

Ungefär vid samma tid som Galileo Galilei i Italien var i färd med att studera jordens och himlens fenomen – liksom åt att provocera den katolska kyrkan – verkade i Holland en matematiker och ingenjör vid namn Simon Stevin (1548 – 1620). Bland mycket annat uppfann han en segeldriven vagn och visade att trycket i en vätska endast beror på djupet. Han bidrog också till spridningen av den decimalnotation som vi idag betraktar som en sådan självklarhet (d.v.s. konventionen att den första siffran efter kommat avser antal tiondelar, den andra antal hundradelar, och så vidare). Simon Stevin är även mannen bakom ett berömt tankeexperiment.

Över ett halvt sekel innan Newton skrev ner sina tre lagar och formulerade den klassiska mekaniken funderade Stevin över kroppar på lutande plan och över vilka krafter som kan beskriva deras rörelse. Han frågade sig hur stor kraft som behövs för att hindra en kropp som ligger på ett friktionsfritt lutande plan från att glida ner. Med andra ord: Hur stor tyngd krävs för att balansera en sådan kropp? (Figur 1.) Stevin hade ingen teori för krafter till sitt förfogande, och ännu mindre någon grundläggande förståelse av gravitationskraften – den som är orsaken till att kroppen glider ner om inget hindrar den. Ändå fann han svaret på problemet.

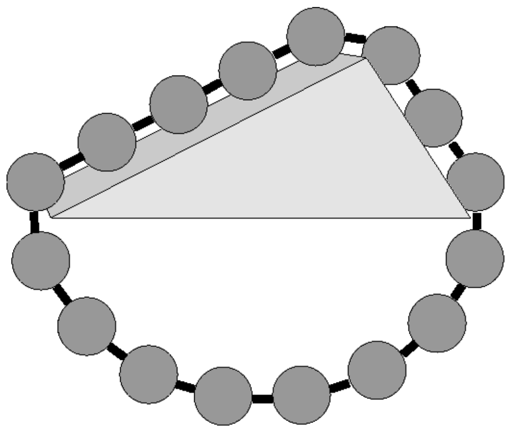


Figur 1

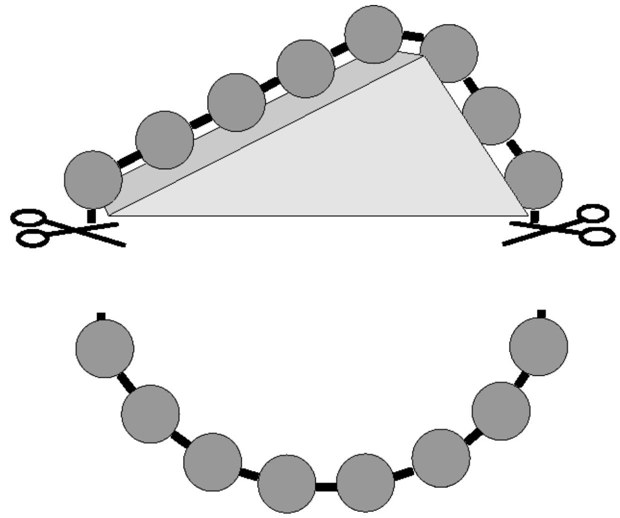
Stevin föreställer sig en triangulär kloss som fästs på sidan av en vägg så att klossens längsta sida – triangelns bas – är horisontell. De två övriga sidorna bildar då var sitt lutande plan med samma höjd men med olika lutning. Han tänker sig sedan att en kedja av likadana sammanlänkade kulor – som ett halsband ungefär – hängs över klossen (figur 2). Ett visst antal av kulorna kommer att vila på den längre av klossens sluttande sidor, och ett något färre antal kommer att vila på den kortare. Resten av halsbandet eller kedjan kommer att bilda en symmetrisk båge under klossen.

Stevin noterar nu att halsbandet sålunda placerat måste befinna sig i jämvikt – det kommer inte att börja rotera vare sig åt ena eller andra hållet. Varför inte? Jo, om till exempel de tre kulorna på

1 Texten publicerad under vinjetten Tankeexperiment i Svenska Fysikersamfundets tidskrift Fysikaktuellt (nr 3, 2009)



Figur 2



Figur 3

klossens branta sida började att glida neråt så skulle de dra med sig de andra kulorna. Halsbandet skulle börja att rotera medurs. När kulorna har rört sig en position framåt är situationen densamma som i utgångsläget, och halsbandet måste således fortsätta att rotera på samma sätt. Resultatet skulle vara en evighetsmaskin, vilket är omöjligt. Så kulhalsbandet ligger stilla över klossen.

Men så måste det förbli även om man avlägsnar den båge som kedjan av kulor bildar under klossen: eftersom bågen är symmetrisk drar den halsbandet lika mycket åt ena som åt andra hållet. Stevin tänker sig alltså att alla de kulor som befinner sig nedanför klossens horisontella undersida klipps bort (figur 3). Den återstående delen av kedjan befinner sig fortfarande i vila över klossen, utan att börja glida åt något håll. Det innebär att vikten hos de kulor som vilar på den längre sidan exakt måste balanseras av vikten hos dem som vilar på den kortare och brantare sidan.

Den sammanlagda vikten hos de kulor som vilar på en av klossens sidor är förstås proportionell mot kulornas antal. Men detta antal motsvarar i sin tur sidans längd. Kulornas vikt på höger och vänster sida förhåller sig således till varandra på samma sätt som motsvarande sidlängder:

$$\frac{[\text{Vikten till höger}]}{[\text{Vikten till vänster}]} = \frac{[\text{Sidlängden till höger}]}{[\text{Sidlängden till vänster}]}$$

Därmed är problemet löst. För att få reda på hur stor den totala vikten hos kulorna på den högra sidan måste vara för att balansera alla kulorna på den vänstra, multiplicerar vi båda leden i uttrycket med [Vikten till vänster]:

$$[\text{Vikten till höger}] = \frac{[\text{Sidlängden till höger}]}{[\text{Sidlängden till vänster}]} \cdot [\text{Vikten till vänster}]$$

För att balansera den vänstra vikten måste man alltså använda en vikt till höger som är lika med den vänstra vikten multiplicerad med kvoten mellan den högra och den vänstra sidlängden. Om till exempel sidlängden till höger är hälften så stor som den till vänster behövs också bara hälften så stor vikt till höger för att balansera vikten till vänster.

Låt oss återgå till ursprungsfrågan. Här var den högra sidan med den balanserande tyngden vertikal. I detta fall utgörs alltså klossen av en rätvinklig triangel. Därmed är kvoten mellan de båda sidlängderna – den vertikalt stående kateten och hypotenusan – helt enkelt sinus för planets lutningsvinkel. Om vi sätter in detta i uttrycket ovan erhåller vi den moderna formuleringen av svaret på Stevins fråga: den tyngd som krävs för att hindra en kropp från att glida ner för ett friktionsfritt lutande plan är likamed kroppens tyngd multiplicerad med sinus för lutningsvinkeln. Detta är naturligtvis också det svar som följer ur Newtons regelverk för hur man hanterar krafter.

Men hur kan Stevin komma fram till rätt svar utan att använda sig av Newtons mekanik?

Resonemangets avgörande steg är att kulhalsbandet, när det placeras över klossen, inte spontant börjar att rotera åt endera hållet. Detta följer av att det inte är möjligt att konstruera en evighetsmaskin. Det är väsentligen detta antagande som leder till att den balanserande kraften måste vara lika med kroppens tyngd multiplicerad med sinus för lutningsvinkeln (i modern formulering). Vem hade kunnat ana att det fanns ett samband mellan storleken hos denna kraft och omöjligheten av att konstruera evighetsmaskiner?

Av teorier kräver vi att de ska vara motsägelsefria. Detta är ett förbluffande starkt krav: det är svårt att ställa upp en motsägelsefri teori som samtidigt har bred tillämpbarhet. Att Stevins tankeexperiment fungerar kan betraktas som uttryck för just detta. Vad hans resonemang visar är nämligen att en teori som förbjuder evighetsmaskiner, men som föreskriver en *annan* kraft, är otänkbar; en sådan teori skulle innebära en motsägelse.

En teori som gör anspråk på att vara allmängiltig snubblar lätt i sitt högmod – den löper stor risk att leda till motsägelser. Ett enkelt och åskådligt sätt att uppenbara eventuella motsägelser är att pröva teorin mot konkreta hypotetiska situationer – med andra ord, genom att utföra tankeexperiment. Det är därför många gånger just kravet på motsägelsefrihet som gör tankeexperiment till ett så användbart och effektivt sätt att resonera.